

Hauptseminar Quantencomputing
Qubits - Interferenz - Verschränkung - Messung

Christoph Mühlich

7. Februar 2003

Einführung

In der vorliegenden Seminararbeit soll eine Einführung in einige interessante Aspekte der Quantenmechanik gegeben werden. Darüber hinaus soll versucht werden, einige Möglichkeiten der Nutzung dieser Aspekte im Bereich des Quantencomputing aufzuzeigen. Natürlich kann diese Arbeit keinen vollständigen Einblick in die Thematik bieten, dazu ist die Quantenmechanik zu komplex. Aber sie soll erreichen, dass der geneigte Leser, sofern er sich bisher noch nicht mit der Quantenmechanik beschäftigt hat, das Thema kennenlernt und dass sein Interesse geweckt wird. Denn die Quantenmechanik bietet solch überraschende Phänomene, dass eigentlich jeder, der sich mit ihr beschäftigt, von ihr fasziniert ist.

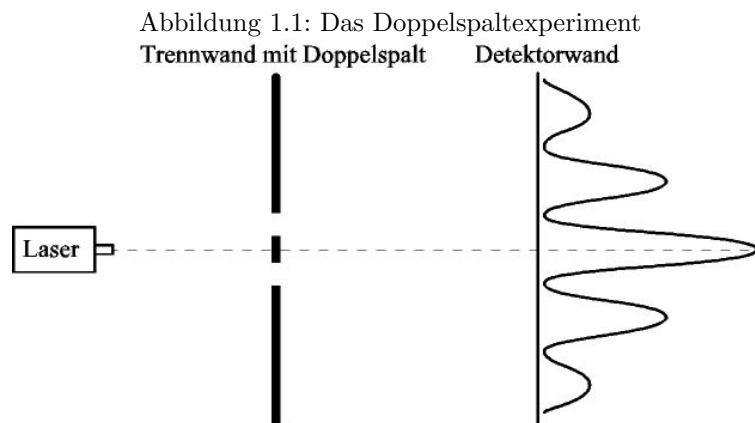
Im Speziellen sollen in dieser Seminararbeit die Aspekte der Interferenz, der Verschränkung und der Messung von quantenmechanischen Systemen erläutert werden. Alle drei Teilgebiete sind grundlegende Eigenschaften von Quantensystemen und somit essentiell für das Verständnis von weiteren Bereichen und Anwendungen der Quantenphysik. Weiterhin gibt es noch ein Kapitel über Qubits, die das quantenmechanische Pendant zu den Bits in klassischen Computern darstellen. Dieses Kapitel stellt auch die erste Verbindung zum Quantencomputing her, um das es in diesem Seminar gehen soll.

Man wird nicht umhinkommen, wenn man sich mit der Quantenmechanik befassen will, sich auch mit der dahinter steckenden Mathematik zu beschäftigen. Diese ist allerdings in ihren Grundzügen relativ einfach und beschränkt sich (in den Bereichen, mit denen wir uns in dieser Arbeit befassen wollen) auf Vektor- und Matrizenrechnung und lineare Gleichungssysteme im komplexen Zahlenraum sowie einige Differentialgleichungen. Trotzdem wird versucht, so wenig Mathematik wie möglich zu verwenden. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf die eigentlichen Phänomene konzentrieren und die Mathematik nur als Hilfe betrachten, die an notwendiger Stelle verwendet wird. In folgenden Artikeln wird die Mathematik der Quantenmechanik eingehender erläutert werden.

Kapitel 1

Interferenz

Als eines der ersten bekannten Phänomene der Quantenmechanik wollen wir die Interferenz betrachten. Da sie schon sehr lange bekannt ist (schon länger als die Quantenmechanik an sich) und sich sowohl mit Wasserwellen als auch mit Licht bzw. Materiewellen zeigen lässt, wird sie auch in der Schule gerne demonstriert. Betrachten wir als erstes einen Versuchsaufbau, mit dem wir die Interferenz erhalten können.



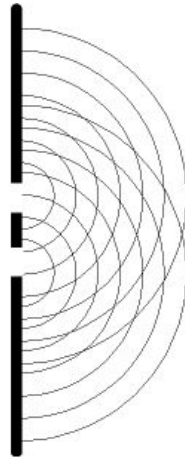
Dieser Versuchsaufbau enthält einen Laser, dessen Lichtstrahl auf eine Wand gerichtet ist, die zwei kleine Spalte enthält. Die Breite eines Spaltes und der Abstand zwischen den Spalten liegt in der Größenordnung der Wellenlänge des Laserlichts. Hinter der Wand mit dem Doppelspalt befindet sich eine Detektorwand, auf der wir das Licht des Lasers sehen können.

Wenn wir nun den Laser einschalten und seinen Lichtstrahl auf den Doppelspalt lenken, so sehen wir hinter dem Spalt auf der Detektorwand nicht etwa einen Lichtpunkt (oder vielleicht zwei), sondern eine ganze Reihe an Lichtpunkten, die von der Mitte hin nach außen immer schwächer werden. In Abbildung 1.1 wird dies durch die Kurve an der Detektorwand dargestellt. Diese Intensitätsverteilung erhält man, wenn man an jedem Punkt die Intensität misst.

Überlegen wir uns nun, wie diese Verteilung zustande kommt. Tun wir für einen Moment so, als hätten wir nicht einen Laser benutzt, sondern Wasserwellen. Dann ergibt sich hinter dem Doppelspalt das in Abbildung 1.2 gezeigte Muster. Dieses Muster entsteht durch die Überlagerung der zwei neuen Wellen, die beim Durchgang durch den Doppelspalt entstanden sind. Trifft ein Wellenberg auf einen anderen Wellenberg, so überlagern sie sich, und wir erhalten konstruktive Interferenz, nämlich ein lokales Maximum. Dasselbe gilt für zwei Wellentäler, nur dass in diesem Fall die Phase anders ist, was aber für die Intensität keine Rolle spielt. Treffen allerdings Wellenberg und Wellental aufeinander, so erhalten wir destruktive Interferenz, nämlich ein lokales Minimum. Trifft ein lokales Maximum auf die Detektorwand, so erhalten wir dort auch ein lokales Maximum, entsprechendes gilt für die lokalen Minima.

Diese Überlegung gilt auch für das Licht des Lasers, wenn wir es als Welle auffassen. Doch wie wir wissen, besteht Licht aus einzelnen Photonen. Wenn wir den Laser normal

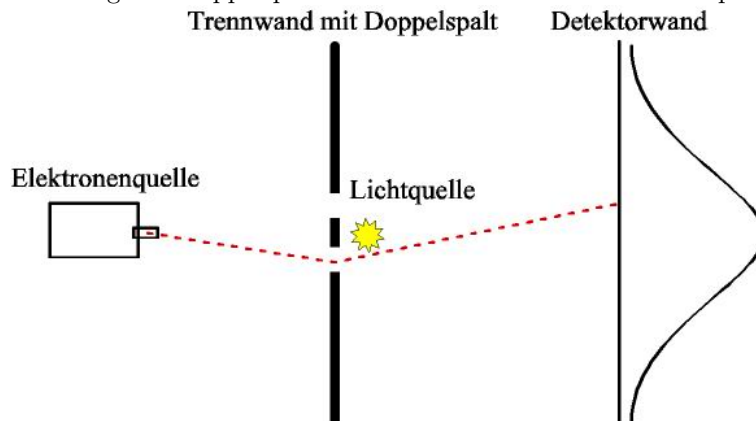
Abbildung 1.2: Interferenz von Wasserwellen



arbeiten lassen, dann kommen genügend Photonen gleichzeitig an, so dass wir von einer Welle ausgehen können. Doch was geschieht, wenn wir die Intensität des Lasers nach und nach vermindern, bis schließlich nur noch einzelne Photonen auf den Doppelspalt treffen? Interessanterweise erhalten wir genau das gleiche Interferenzmuster wie vorher, nur baut es sich nun langsamer auf. Doch wie kann das sein, obwohl wir gar keine Wellen mehr haben, die sich überlagern können?

Um diese Frage zu beantworten, schauen wir uns als erstes an, wie ein einzelnes Photon vom Laser zur Detektorwand gelangen kann. Wenn wir annehmen, dass die Wand, die den Doppelspalt enthält, unendlich groß ist, dann gibt es für das Photon eigentlich nur zwei Wege zur Detektorwand: Nämlich entweder durch den oberen Spalt oder durch den unteren. Genaugenommen gibt es noch eine dritte Möglichkeit für das Photon. Es könnte sich ja teilen und durch beide Spalte hindurchgehen. Um nun herauszufinden, welchen Weg das Photon nimmt, ändern wir unseren Versuchsaufbau ein wenig ab. Wir ersetzen unseren Laser durch eine Elektronenquelle und bringen eine Lichtquelle (die wir beliebig an- und abschalten können) hinter dem Doppelspalt an. Abbildung 1.3 zeigt den veränderten Versuchsaufbau.

Abbildung 1.3: Doppelspaltversuch mit Elektronen und Lichtquelle



Lassen wir als erstes die Lichtquelle ausgeschaltet und die Elektronenquelle mit voller Intensität arbeiten. Wir erhalten dann das aus Abbildung 1.1 bekannte Interferenzmuster. Nun lassen wir nur noch einzelne Elektronen durch den Doppelspalt hindurchgehen und warten ab, was geschieht. Immer noch erhalten wir das bekannte Interferenzmuster. Jetzt wollen wir herausfinden, durch welchen Spalt das einzelne Elektron gegangen ist. Dazu schalten wir unsere Lichtquelle ein. Wenn das Elektron durch den unteren Spalt hindurchgeht, so erhalten wir einen Lichtblitz unten, wenn es durch den oberen Spalt geht, erhalten wir einen Lichtblitz oben. Teilt sich das Elektron und geht durch beide Spalte, erhalten wir zwei Lichtblitze. Das erste, was wir erkennen, ist, dass wir niemals zwei Lichtblitze gleichzeitig sehen,

sondern immer nur einen. Daraus schließen wir, dass sich keines der Elektronen geteilt hat und durch beide Spalte hindurch gegangen ist. Es hat sich also immer für einen der beiden Spalte 'entschieden'.

Allerdings stellen wir jetzt bei der Betrachtung der Intensitätsverteilung fest, dass sie sich entscheidend geändert hat. In Abbildung 1.3 sehen wir die neue Verteilung. Sie entspricht einer normalen Verteilung, wie wir sie eigentlich am Anfang schon erwartet hätten. Aber warum erhalten wir, wenn das Licht eingeschaltet ist, keine Interferenz mehr? Nun, vielleicht stört ja die Lichtquelle die Elektronen und lenkt sie aus ihrer eigentlichen Bahn ab. Also ändern wir die Intensität (Helligkeit) der Lichtquelle, um den Einfluss auf die Elektronen zu verkleinern. Doch immer noch erhalten wir die obige Intensitätsverteilung. Nun ändern wir die Wellenlänge (Farbe) des Lichtes und damit die Energie der einzelnen Photonen. Hier stellen wir eine Veränderung fest: Wenn wir ab einem bestimmten Schwellenwert die Wellenlänge noch größer machen, erhalten wir langsam wieder das bekannte Interferenzmuster. Allerdings ist nun die Wellenlänge des Lichts so groß, dass die Auflösung nicht mehr ausreicht, um zu unterscheiden, durch welchen Spalt das Elektron gegangen ist. Wir erhalten jetzt bei jedem Elektron einen großen verschwommenen Lichtblitz, so dass wir über den Ort des Elektrons nichts mehr aussagen können. Das heißt, sobald wir wissen durch welchen Spalt das Elektron gegangen ist, erhalten wir keine Interferenz, wenn wir diese Information nicht haben, ergibt sich das Interferenzmuster. Das führt uns direkt zu einigen grundlegenden Regeln für Interferenz:

Die Feynman-Regeln für Interferenz¹

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem idealen Experiment ist gleich dem Quadrat des Absolutbetrages einer komplexen Zahl, der sogenannten Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$P_1 = |\Phi_1|^2 \quad (1.1)$$

2. Gibt es für das Auftreten des Ereignisses mehrere alternative, ununterscheidbare Möglichkeiten, so ist die Gesamtwahrscheinlichkeitsamplitude gleich der Summe der verschiedenen einzelnen Wahrscheinlichkeitsamplituden: Man erhält Interferenz.

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \Phi_1 + \Phi_2 \\ P_{12} &= |\Phi_1 + \Phi_2|^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

3. Kann im Experiment festgestellt werden, welche der alternativen Möglichkeiten tatsächlich gewählt wurde, so ist die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten: Die Interferenz ist zerstört.²

$$\begin{aligned} P_{12} &= |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Mit diesen drei Regeln lässt sich die Interferenz am Doppelspalt einfach erklären: Es gibt zwei ununterscheidbare Alternativen für das Teilchen, um von der Quelle auf den Detektorschirm zu gelangen. Es kann entweder durch den oberen Spalt oder durch den unteren Spalt gehen. Daraus folgt aus den Feynman-Regeln, dass Interferenz auftritt. Wenn wir allerdings die Lichtquelle im Experiment einschalten, so können wir feststellen, durch welchen Spalt das Teilchen gelangt ist und die verschiedenen Möglichkeiten sind nicht mehr ununterscheidbar. Somit ist nach Regel 3 die Interferenz zerstört.

Allerdings lässt sich damit das Interferenzmuster am Einfachspalt etwas schwieriger erklären, da es hier ja keine zwei Möglichkeiten für das Teilchen gibt. Betrachten wir dazu als erstes die von Werner Heisenberg aufgestellte Unschärferelation:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (1.4)$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum, also eine Naturkonstante, darstellt. Die Aussage der Unschärferelation ist, dass es nicht möglich ist, sowohl den Ort eines Teilchens als auch

¹siehe [FLS96], S. 30

²Man beachte an dieser Stelle, dass $|\Phi_1 + \Phi_2|^2 \neq |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2$

seinen Impuls gleichzeitig beliebig genau zu messen. Je genauer die eine Eigenschaft gemessen wird, desto ungenauer (unschärfer) ist die andere bestimmt.³

Mit dieser Argumentation ist es relativ leicht, die Interferenz am Einfachspalt zu erklären: Wenn das Teilchen durch den Spalt hindurchgeht, ist sein Ort relativ genau bestimmt, nämlich (in x -Richtung) auf die Breite des Spaltes. Dadurch ergibt sich nach der Unschärferelation, dass der Impuls unbestimmt ist. Es kann also für ein einzelnes Teilchen nicht vorhergesagt werden, welchen Weg es nach dem Spalt nehmen wird, also wo es auf den Detektorschirm treffen wird. Es lässt sich nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ort des Auftreffens angeben. Diese Verteilung entspricht genau dem Interferenzmuster, das sich (bei genügend vielen Teilchen) auf dem Schirm zeigt.

³Im Allgemeinen wird die Unschärferelation mit Hilfe der Interferenz am Einfachspalt erklärt. Wir gehen hier den umgekehrten Weg und setzen die Unschärferelation als gegeben voraus und erklären damit die Interferenz am Einfachspalt.

Kapitel 2

Qubits

Wie in der Einführung schon gesagt wurde (und wie man auch vermuten könnte), sind Qubits das quantenmechanische Pendant zu den klassischen Bits. Mit ihnen lässt sich in einem Quantencomputer auf ähnliche Weise rechnen, wie das in einem klassischen Computer geschieht. Prinzipiell ließen sich dafür alle quantenmechanischen Teilchen verwenden, aber um weiterhin mit der klassischen Informationstheorie arbeiten zu können, werden für Qubits quantenmechanische Zwei-Zustands-Systeme verwendet. Das können z.B. Teilchen mit dem Spin $1/2$ sein, Ionen mit zwei diskreten Energieniveaus oder die Polarisation von Photonen (in waagrecht und senkrecht Richtung). In jedem Fall gibt es für die verwendeten Teilchen zwei diskrete, wohl unterscheidbare Möglichkeiten für den Grundzustand. Dadurch lässt sich die klassische Binärlogik prinzipiell auf einen Quantencomputer übertragen. Natürlich kann man aufgrund weiterer Eigenschaften von Qubits einen klassischen Computer nicht Eins zu Eins in einen Quantencomputer umwandeln. Aber die eigentliche Logik, die man verwendet, unterscheidet sich kaum von den jetzigen Computern.

Auch die Darstellung von Qubits erfolgt analog zum klassischen Bit, es wird dabei die sog. Dirac-Schreibweise verwendet.

$$|0\rangle \text{ und } |1\rangle, \text{ wobei gilt } \langle\Psi|\Psi\rangle = 1, \Psi = \{0, 1\} \quad (2.1)$$

Diese Darstellung bezeichnet ein Qubit in einem seiner zwei Grundzustände. Bis zu diesem Punkt gibt es abgesehen von der Schreibweise keinen Unterschied zum klassischen Bit (außer dass Qubits Teilchen und Bits Spannungs-/Stromunterschiede sind). Eine der ersten elementaren Eigenschaften von Qubits, die wir betrachten werden, ist die sog. *Überlagerung* oder *Superposition*. Ein Qubit kann sich wie auch jedes andere quantenmechanische System mit mehr als einem Grundzustand in einer Überlagerung seiner Grundzustände befinden. Solch ein Zustand wird mathematisch durch eine Linearkombination der Grundzustände im zweidimensionalen komplexen Hilbertraum beschrieben, in unserem Fall der Qubits erhalten wir dafür die folgende Gleichung:

$$|\Psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ wobei gilt } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.2)$$

Die Absolutquadrate der Koeffizienten α und β werden dabei als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst, das System im entsprechenden Grundzustand zu finden (siehe auch das Kapitel über die Messung von quantenmechanischen Systemen).

$$|\Psi\rangle_{(N)} \in \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2 \quad (2.3)$$

Die Dimension des Hilbertraumes H zur Beschreibung von N Qubits wächst dabei exponentiell mit der Anzahl der Qubits:

$$\text{Dim}(H) = 2^N \quad (2.4)$$

Qubits haben eine Reihe von ausgezeichneten Eigenschaften, die sie deutlich von den klassischen Bits unterscheiden. Als erstes ist dabei die oben angesprochene Überlagerung von Basiszuständen zu nennen. Das System befindet sich dabei quasi in allen möglichen Grundzuständen gleichzeitig. Es ist schwierig, sich dieses Verhalten auf klassische Weise vorzustellen, da es im normalen Leben keine Entsprechung dafür gibt. Am besten stellt man

sich Überlagerung vor, in dem man sich folgendes sagt: 'Solange ich das System nicht beobachte, weiss ich nicht, in welchem Zustand es sich befindet. Also gehe ich davon aus, dass es sich in allen Zuständen gleichzeitig befindet und sich erst dann, wenn ich es beobachte, für einen konkreten Zustand entscheidet.' Dabei gelangen wir auch gleich zu einem entscheidenden Punkt der Überlagerung: Sobald das System beobachtet (und damit gemessen) wird, verschwindet die Überlagerung¹. Weitere Einzelheiten zum Problem der Messung und Beobachtung finden Sie im Kapitel Messung.

Wenn sich Qubits in einer kohärenten Überlagerung befinden, so entwickelt sich das System gleichzeitig auf allen möglichen Wegen und zeigt Interferenz. Dadurch ist es mit einem Quantencomputer prinzipiell möglich, einen Algorithmus auf alle möglichen Eingaben gleichzeitig anzuwenden. Dazu gibt man die Eingabequbits in Überlagerung in das System und erhält als Ausgabe eine Überlagerung aller möglichen Ergebnisse.

Eine weitere Eigenschaft von Qubits ist die sog. Verschränkung (engl: *Entanglement*). Dabei können die einzelnen Qubits nicht mehr getrennt durch Zustände beschrieben werden, sondern nur noch gemeinsam mit einer einzigen Gleichung. Mehr zu diesem Thema findet sich im nächsten Kapitel.

Kommen wir nun noch kurz zur dynamischen Entwicklung eines Systems von Qubits. Wie in jedem quantenmechanischen System wird die zeitliche Entwicklung durch die sog. Schrödinger-Gleichung bestimmt. Da diese Gleichung nicht trivial ist (insbesondere die Herleitung), wollen wir sie an dieser Stelle der Vollständigkeit halber nur kurz angeben:

$$H|\Psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle \quad (2.5)$$

H ist dabei der sog. Hamilton-Operator, in dem die Umwelteigenschaften, also sämtliche das System beeinflussende Parameter enthalten sind. H ist eine hermitsche komplexe Matrix, deren Bestimmung in der Praxis im allgemeinen sehr schwierig ist.

Letztendlich wollen wir mit Qubits ja nichts anderes machen als mit klassischen Bits auch: nämlich rechnen. Das gestaltet sich ähnlich wie mit klassischen Bits, allerdings mit einem signifikanten Unterschied: *Operationen auf Qubits sind immer reversibel!*

Betrachten wir dazu kurz den Nachweis:

Das System hat einen Ausgangszustand, der in einen Endzustand übergeht:

$$|\Psi\rangle_1 = \alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle \Rightarrow |\Psi\rangle_2 = \alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle \quad (2.6)$$

Diese Operation lässt sich schreiben als

$$|\Psi\rangle_1 U = |\Psi\rangle_2 \quad (2.7)$$

wobei U eine komplexe Transformationsmatrix ist. Aus 2.6 und 2.2 folgt, dass diese Bedingungen gelten müssen:

$$|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1 \text{ und } |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1 \quad (2.8)$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung nur mit einer unitären Transformationsmatrix U erfüllbar ist. Aus den Eigenschaften einer unitären Matrix folgt sofort, dass die Operation, die U ausführt, reversibel ist. Daraus ergibt sich auch, dass jede unitäre Transformationsmatrix eine gültige Operation auf einem Quantensystem darstellt.

Im Folgenden sehen wir als Vorgriff auf spätere Kapitel einige ausgewählte quantenmechanische Gatter und deren Transformationsmatrizen U. Wie man leicht durch nachrechnen feststellen kann, sind diese Matrizen alle, wie oben gefordert, unitär.

¹vgl. das Doppelspaltexperiment im vorigen Kapitel. Dort verschwand das Interferenzmuster, sobald man den Weg eines einzelnen Photons beobachtet hatte.

Das Hadamard-Gate:

$$\text{---} \boxed{\text{H}} \text{---} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Das Pauli-X-Gate:

$$\text{---} \boxed{\text{X}} \text{---} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Pauli-Y-Gate:

$$\text{---} \boxed{\text{Y}} \text{---} \quad \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Das Pauli-Z-Gate

$$\text{---} \boxed{\text{Z}} \text{---} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Kapitel 3

Verschränkung

Als eines der faszinierendsten Phänomene der Quantenmechanik wollen wir nun die Verschränkung (engl. *Entanglement*) betrachten. Ohne uns zunächst Gedanken darüber zu machen, wie man Verschränkung (bzw. ihre Auswirkungen) im klassischen Sinne verstehen könnte, betrachten wir zuerst ihre Eigenschaften.

Zwei quantenmechanische Teilchen können eine Korrelation miteinander eingehen, die Verschränkung genannt wird. Sobald sie verschränkt sind, kann keines der beiden Teilchen mehr einzeln beschrieben werden. Es gibt daher keine Zustandsgleichung mehr, die ein einzelnes der beiden Teilchen beschreiben kann. Es ist nur noch möglich, eine gemeinsame Zustandsgleichung für die Teilchen anzugeben. Ein Beispiel für einen solchen Zustand sehen Sie in Gleichung 3.1:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \quad (3.1)$$

Diese Zustandsgleichung ist nicht faktorisiert, d.h. sie lässt sich *nicht* schreiben als

$$|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle \quad (3.2)$$

Nachweis der Nicht-Faktorisiertbarkeit verschränkter Zustände

Gegeben sei folgender verschränkter Zustand¹:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle |-\rangle - |-\rangle |+\rangle) \quad (3.3)$$

Wenn nun dieser Zustand faktorisiert wäre, so müsste folgendes gelten:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle |\Psi_2\rangle \quad \text{mit} \quad |\Psi_1\rangle = c_+ |+\rangle_1 + c_- |-\rangle_1 \quad \text{und} \quad |\Psi_2\rangle = d_+ |+\rangle_2 + d_- |-\rangle_2 \quad (3.4)$$

Multipliziert man die obere Gleichung 3.4 aus, ergibt sich

$$|\Psi\rangle = c_+ d_+ |+\rangle_1 |+\rangle_2 + c_+ d_- |+\rangle_1 |-\rangle_2 + c_- d_+ |-\rangle_1 |+\rangle_2 + c_- d_- |-\rangle_1 |-\rangle_2 \quad (3.5)$$

Setzt man nun 3.3 und 3.5 gleich, ergeben sich folgende Bedingungen, um die Gleichung zu erfüllen:

$$c_+ d_+ = 0 \quad \text{und} \quad c_+ d_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad c_- d_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad c_- d_- = 0 \quad (3.6)$$

Wie man leicht erkennen kann, hat dieses Gleichungssystem keine Lösung. Daraus ergibt sich, dass dieser Zustand nicht faktorisiert und damit verschränkt ist. Somit haben die einzelnen verschränkten Teilchen keine eigenen Zustandsgleichungen mehr.

Aber was charakterisiert nun ein verschränktes System außer der Tatsache, dass seine Zustandsgleichung nicht faktorisiert ist? Im Prinzip ist es eine auf den ersten Blick unscheinbare Eigenschaft: Die Messung des Zustandes eines der Teilchen legt das Messergebnis

¹Anmerkung: + steht in diesem Beispiel für Spin Up eines Teilchens, - steht für Spin Down.

für das andere Teilchen fest. Betrachten wir dazu ein kleines Beispiel: Hat man zwei verschränkte Spin $1/2$ -Teilchen gegeben durch die Formel in 3.3 und misst man an einem der beiden Teilchen beispielsweise den Spin $|-\rangle$, so ist damit sofort der Spin $|+\rangle$ für das andere Teilchen festgelegt. Diese Festlegung des Messergebnisses für das zweite Teilchen erfolgt sofort, also ohne Zeitverzögerung. Weiterhin ist es für diesen Effekt irrelevant, wie weit die beiden Teilchen voneinander entfernt sind.

Allerdings ist durch diesen Effekt keine Kommunikation mit Überlichtgeschwindigkeit möglich, die der Einstein'schen Relativitätstheorie widersprechen würde. Sie ist deshalb nicht möglich, da das Messergebnis des ersten Teilchens mit normaler Kommunikation (also maximal mit Lichtgeschwindigkeit) zum Beobachter des zweiten Teilchens übermittelt werden muss. Denn wenn der zweite Beobachter das Ergebnis der ersten Messung nicht kennt, so ist für ihn das Ergebnis der zweiten Messung nicht festgelegt². Ein kleines Gedankenexperiment soll dies verdeutlichen: Betrachten wir Alice und Bob. Beide erhalten je ein Teilchen eines verschränkten Teilchenpaares. Nun fahren Alice und Bob getrennt voneinander in den Urlaub und vereinbaren, dass jeder sein Teilchen misst, sobald er am Urlaubsort ankommt. Nehmen wir nun an, dass Alice in ihrem Hotelzimmer den Spin $|-\rangle$ an ihrem Teilchen misst. Dadurch wird das zweite Teilchen beeinflusst und somit ist festgelegt, dass Bob an seinem Teilchen auf jeden Fall den Spin $|+\rangle$ messen wird. Aber vielleicht war es ja auch umgekehrt. Möglicherweise ist Bob schon vor Alice angekommen und hat durch die Messung seines Teilchens das Ergebnis von Alice Messung festgelegt. Es lässt sich ohne eine weitere, klassische Kommunikation zwischen Alice und Bob nicht entscheiden, wer zuerst sein Teilchen gemessen hat und welches Ergebnis durch das andere beeinflusst wurde.

Diese "geisterhafte", sofortige Festlegung des zweiten Messergebnisses durch das (beliebig) weit entfernte erste Teilchen war eine Eigenschaft der Quantenmechanik, die anfangs nicht nur Zustimmung fand. Es wurde (u.a. von Einstein) nicht akzeptiert, dass eine lokale Operation (die Messung des ersten Teilchens) auch nicht lokale Auswirkungen haben kann. Um diesem Problem zu begegnen, wurde die Theorie der sog. versteckten Variablen (engl. *hidden Variables*) entwickelt. Diese Theorie besagt, dass es diese nicht-lokalen Auswirkungen nicht geben kann und dass deshalb die Messergebnisse der beiden Teilchen schon vorher festgelegt gewesen sein muss. Diese Festlegung erfolgt durch eben diese versteckten Variablen, die wir einfach nicht kennen und u.U. auch gar nicht kennen können. Das heisst vereinfacht ausgedrückt, dass es irgendwelche Parameter im System gibt, die den gemessenen Zustand der Teilchen schon bei der Entstehung der Verschränkung festlegen.

Allerdings lässt sich durch die sog. Bell-Ungleichungen zeigen, dass eine Theorie mit versteckten Variablen die Quantenmechanik nicht vollständig beschreiben kann. Im Grunde sind die Bell-Ungleichungen (von denen es im Prinzip unendlich viele gibt) nichts anderes als Aussagen über die normale Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von Teilchen bestimmte Messwerte zu erhalten. Es wurde inzwischen in vielen Experimenten gezeigt, dass in der Praxis die Bell-Ungleichungen eigentlich immer nicht erfüllt werden. Dadurch ist gezeigt, dass sich die Ergebnisse nicht durch normale Wahrscheinlichkeiten erklären lassen, was bei versteckten Variablen der Fall sein müsste, sondern nur durch die oben beschriebenen Effekte der quantenmechanischen Verschränkung.

Zum Abschluss sei an dieser Stelle noch eine mögliche Bell-Ungleichung dargestellt. Es handelt sich dabei um die sog. CHSH-Ungleichung, benannt nach den Wissenschaftlern Clauser, Horne, Shimony und Holt, die diese Ungleichung als erste in einem Experiment verwendet haben:

$$\frac{1}{2} |E(A_1, B_1) + E(A_1, B_2) + E(A_2, B_1) + E(A_2, B_2)| \leq 1 \quad (3.7)$$

²Natürlich ist für das zweite Teilchen das Messergebnis festgelegt, aber wenn der Beobachter des zweiten Teilchens keine Kenntnis von der ersten Messung hat, kann er nicht im Voraus sagen, welches Messergebnis er am zweiten Teilchen erhalten wird.

Kapitel 4

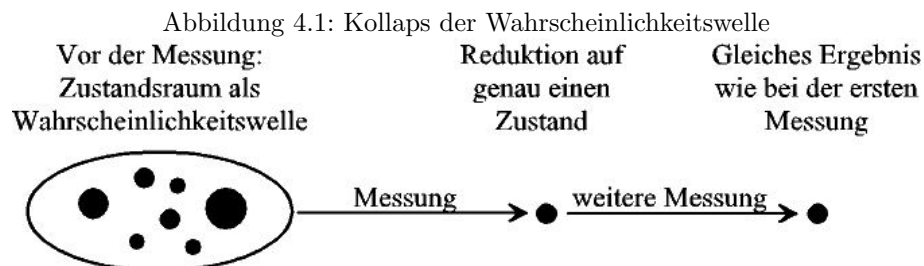
Messung

Kommen wir nun zu einem vor allem für den praktischen Einsatz wichtigen Kapitel. Nachdem wir mit unseren Qubits gerechnet haben, möchten wir natürlich auch das Ergebnis unserer Rechnung feststellen. Dazu müssen wir das System (oder zumindest Teile davon) einer Messung unterziehen und genau dabei stellen sich einige Probleme, die wir im klassischen Computer nicht haben.

Betrachten wir als erstes ein System in Superposition. Wie schon angesprochen, ist dieser Zustand eine Überlagerung aller möglichen Basiszustände des Systems. Das Problem, das wir nun haben, ist, dass man bei einem quantenmechanischen System immer nur Basiszustände messen kann. Man wird niemals eine Superposition direkt messen können. Was aber geschieht bei der Messung einer Superposition?

Oft werden die möglichen Zustände eines System auch als sog. Wahrscheinlichkeitswelle beschrieben, die dem Messen eines jeden möglichen Zustands eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnet. Bei der Messung des Systems kollabiert diese Wahrscheinlichkeitswelle auf genau einen Zustand, nämlich das Messergebnis. Danach befindet sich das System nicht mehr in der Superposition, sondern in dem gemessenen Zustand. Jede weitere (gleiche) Messung an diesem System liefert dann auch immer das gleiche Ergebnis.

Um das ganze ein wenig anschaulicher zu machen, sei an dieser Stelle eine kleine Grafik gezeigt, die verdeutlichen soll, was bei einer Messung geschieht:



Betrachten wir nun kurz den mathematischen Teil der Messung eines quantenmechanischen Systems. Die Messung wird beschrieben durch eine Menge von Messoperatoren $\{M_m\}$, wobei sich der Index m auf das mögliche Ergebnis bezieht. Diese Messoperatoren sind hermitesche Matrizen, die so gewählt sind, dass sich alle Wahrscheinlichkeiten p_m auf 1 summieren. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Messergebnis m ergibt sich durch die folgende Formel:

$$p_m = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle \quad (4.1)$$

und der Zustand des Systems nach der Messung ist gegeben durch

$$\frac{M_m | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}} \quad (4.2)$$

Es gibt noch zwei weitere Möglichkeiten, die Messung mathematisch zu betrachten. Die eine ist die sog. 'Projektive Messung'. Dabei wird die Spektralzerlegung der Observablen

bestimmt und mit dieser weitergerechnet. Auf diese Weise ist es sehr einfach möglich, den Erwartungswert und die Varianz der möglichen Ergebnisse zu bestimmen. Desweiteren gibt es noch die sog. POVM (Positive Operator-Valued Measure). Diese Art der Berechnung ist vergleichbar der oben angegebenen, vernachlässigt aber den Zustand des Systems nach der Messung und liefert nur die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Möglichkeiten. Daher wird diese Messung oft dann verwendet, wenn man nur die Ergebnisse benötigt und das System danach nicht mehr. Die allgemeinste Art der Messung ist allerdings die oben in Gleichung 4.1 angegebene. Alle anderen Messungen sind Abwandlungen von dieser und lassen sich durch diese auch durchführen.

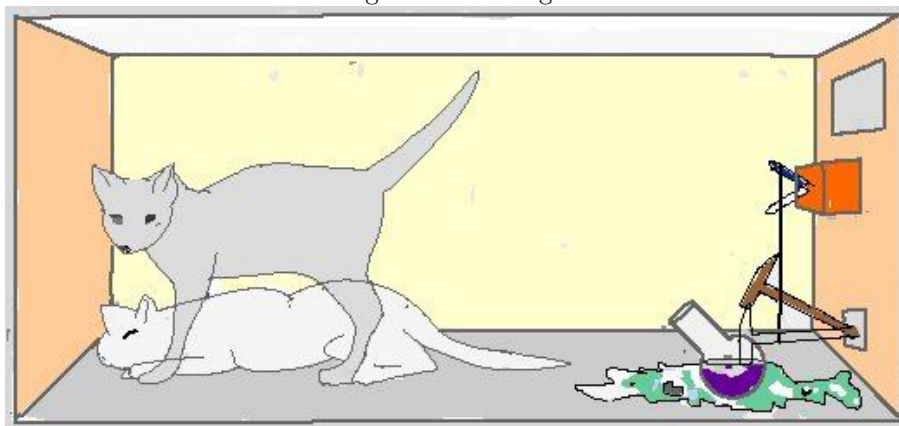
Es gibt allerdings noch ein weiteres, schwerwiegenderes Problem bei der Messung von quantenmechanischen Systemen. Wie am Anfang angesprochen, besagt die Heisenbergsche Unschärferelation, dass es nicht möglich ist, gleichzeitig den Ort und den Impuls eines Teilchens beliebig genau zu messen. Diese Aussage trifft nicht nur auf Ort und Impuls zu, sondern auch auf andere Kombinationen von Eigenschaften. Niels Bohr prägte dafür den Ausdruck 'Komplementarität'. Die gleichzeitige, genaue Messung von zueinander komplementären Eigenschaften ist demnach nicht möglich.

Man muss dabei allerdings noch zusätzlich beachten, dass es auch nicht möglich ist, die Ergebnisse von komplementären Eigenschaften, die in verschiedenen Messungen bestimmt wurden, zu einem Gesamtergebnis zusammenzuführen. Denn bei den unterschiedlichen Messungen wurde nicht das gleiche System gemessen, sondern verschiedene, da ja, wie oben angesprochen, jede Messung den Zustand eines Systems verändert.

Mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation ist es möglich, die maximale Genauigkeit der Messung beliebiger komplementärer Eigenschaften zu bestimmen.

Als weiteres anschauliches Gedankenexperiment wollen wir nun die nach Erwin Schrödinger benannte 'Schrödingers Katze' betrachten.

Abbildung 4.2: Schrödingers Katze



Die Katze befindet sich in einem abgeschlossenen Kasten, der einen Apparat enthält, der zufällig (mit $p = 0,5$) innerhalb einer Stunde ein tödliches Gift freisetzen kann. Die Zufälligkeit wird dabei z.B. durch die Messung des Zerfalls von radioaktiven Atomen erzeugt. Dadurch erhält man echte Zufälligkeit.

Wenn man nun genau eine Stunde wartet, so ist die Katze mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ tot und ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ noch lebendig. Quantenmechanisch betrachtet, befindet sich die Katze in diesem Moment in der Superposition zwischen den Basiszuständen tot und lebendig. Öffnet man allerdings dann den Kasten, findet eine Messung des Systems statt und die Superposition zerfällt und man findet die Katze entweder tot oder lebendig vor.

Damit sind wir auch schon beim nächsten Thema: Es ist nicht immer möglich, einem Teilchen eine Eigenschaft zuzuordnen. Ohne die Eigenschaft zu messen, kann man nicht davon reden, das Teilchen besitze diese Eigenschaft überhaupt. Die Elektronen im Doppelspaltexperiment ohne Lichtquelle hatten die Eigenschaft Ort nicht. Erst mit dem Einschalten der

Lichtquelle, was ja dem Messen des Ortes entsprach, besaßen die Elektronen wieder die Eigenschaft Ort. Erst dann war es wieder sinnvoll, über den Ort der Teilchen zu reden. Genauso besitzt die Katze im obigen Beispiel im Überlagerungszustand die Eigenschaft 'Lebendigkeit' nicht. Es hat keinen Sinn zu sagen, die Katze wäre tot oder lebendig. Erst mit dem Öffnen des Kastens, was ja wieder eine Messung darstellt, kann man darüber eine Aussage treffen.

Allerdings kann man sich eine Katze in Superposition sicherlich nur sehr schwer vorstellen. Und genau genommen wird sich die Katze in dem Kasten nie (bzw. nur eine sehr kurze Zeitspanne lang) wirklich in der Superposition befinden. Denn nicht nur das direkte Messen oder Beobachten eines Systems verändert es, sondern jede Interaktion mit ihm. Allerdings ist schon der Aufprall eines Sauerstoffatoms aus der Umgebungsluft eine Interaktion mit dem System. Dadurch wird das System verändert und die Superposition zerfällt.

Diese Wechselwirkung der Umgebung mit dem System wird Dekohärenz genannt. Im Labor ist sie meist unerwünscht, im täglichen Leben ist sie sehr nützlich, denn sonst wären wir ständig von Katzen umgeben, die weder tot noch lebendig sind... Durch die Dekohärenz ist es im Experiment sehr schwierig, quantenmechanische Systeme zu untersuchen. Denn durch eine Beeinflussung des Systems von aussen wird natürlich das Messergebnis verfälscht. Also ist man bestrebt, diese auszuschalten. Dazu muss allerdings das System vollständig von der Umwelt getrennt werden. Das ist bei mikroskopischen Systemen noch im Bereich des Machbaren, aber bei makroskopischen Dingen, wie z.B. einer Katze, ist das im Prinzip unmöglich. Und genau aus diesem Grund ist Schrödingers Katze auch nur ein Gedankenexperiment.

Literaturverzeichnis

- [AF99] Gernot Alber and Matthias Freyberger. Quantenkorrelationen und die bellschen ungleichungen. *Physikalische Blätter*, 9(55):23–27, 1999.
- [BCZ99] Hans-Jürgen Briegel, Ignacio Cirac, and Peter Zoller. Quantencomputer. *Physikalische Blätter*, 9(55):37–43, 1999.
- [Dop98] Birgit Dopfer. *Zwei Experimente zur Interferenz von Zwei-Photonen-Zuständen*. PhD thesis, Leopold-Franzens Universität Innsbruck, 1998.
- [FLS96] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *Vorlesungen über Physik*, volume III. Oldenbourg Verlag, München, 1996.
- [Goh01] Christoph Gohle. Quanteninformation und verschränkung in relativistischen szenarien. Master’s thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2001.
- [Gru99] Jozef Gruska. *Quantum Computing*. McGraw-Hill, 1999.
- [Hir01] Mika Hirvensalo. *Quantum Computing*. Springer-Verlag, 2001.
- [Mil] Münchener internetprojekt zur lehrerfortbildung in quantenmechanik. <http://http://www.cip.physik.uni-muenchen.de/milq/>.
- [NC00] Michael L. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [Wal00] Herbert Walther. Quantenphysik zwischen theorie und anwendung. *Physikalische Blätter*, 12(56):57–63, 2000.
- [WC98] Colin P. Williams and Scott H. Clearwater. *Explorations in quantum computing*. Springer-Verlag, 1998.